

# ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ УЧЕТА ПОПЕРЕЧНОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА В ЛИМ С ПОМОЩЬЮ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Назаров С.Л.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия, nazarovsl.ekb@yandex.ru

**Аннотация** — Рассмотрены различные способы учета поперечного краевого эффекта в массивных немагнитных вторичных элементах (ВЭ) линейных индукционных машин (ЛИМ). Предложена двумерная модель ЛИМ. Приведено сопоставление расчетов, по одномерным и двумерным моделям.

**Ключевые слова** — линейные индукционные машины, поперечный краевой эффект.

## I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Существенное влияние на характеристики линейных индукционных машин (ЛИМ) с массивным вторичным элементом (ВЭ) оказывает поперечный краевой эффект, состоящий в возникновении продольной составляющей вторичной плотности тока  $J_x$  в пределах активной зоны индуктора, наряду с основной – поперечной составляющей  $J_y$ .

Подробный анализ этого явления проведен для круговых машин в [1], и для линейных бесконечной длины в [2]. В указанных работах использовались одинаковые расчетные одномерные  $y$ -модели индукционной машины с немагнитным массивным ВЭ (при одних и тех же допущениях), что обусловило и одинаковые результаты – равнозначность выражений, полученных в [1,2] для магнитного поля и вторичной плотности тока.

Практический выход этих исследований состоял в определении поправочных коэффициентов, косвенно учитывающих конечную ширину ВЭ ( $a \neq \infty$ ) для одномерных  $x$ -моделей - по своему определению, бесконечно широких ( $a = \infty$ ) индукционных машин. Так, в [1] учет поперечного краевого эффекта для  $x$ -моделей производился изменением реальной проводимости ВЭ (внутренним образом), в [2] – введением поправочного коэффициента к усилию (внешним образом).

Отметим, что одним из допущений этих работ было представление всех магнитных и электрических величин ЛИМ в виде чисто гармонических пространственных распределений вдоль продольной оси ( $x$ ) машины (что позволяет свести исходную  $x,y$ -двумерную задачу к  $y$ -одномерной).

Поскольку магнитное поле ЛИМ имеет более сложную структуру с составляющими, имеющими различные пространственные периоды и различную степень изменения их амплитуды, то возникает закономерный вопрос о степени достоверности способов учета поперечного краевого эффекта [1, 2] в одномерных  $x$ -моделях, а также в двумерных  $x,z$ -моделях ЛИМ (включая современные численные пакеты расчета магнитного поля, например, ELCUT, COMSOL).

Ответом на этот вопрос, может быть сопоставление результатов расчетов по одномерной  $x$ -модели ЛИМ [1, 2] с косвенным учетом поперечного краевого эффекта, – введением поправочных коэффициентов, и расчетов по двумерной  $x,y$ -модели, где продольные и поперечный эффекты описываются естественным образом.

Наиболее близкой к поставленной задаче является двумерная  $x,y$ -модель ЛИМ А.П. Ращепкина [3] с бесконечно длинными и широкими магнитопроводами индуктора и ВЭ ограниченной ширины.

Однако, при четкости описания расчетной  $x,y$ -модели ЛИМ, ее решение имело определенный недостаток. Используя вполне корректный прием разложения результирующего магнитного поля  $B_z$  на известное первичное  $B_{z1}$  и искомое вторичное  $B_{z2}$

$$B_z = B_{z1} + B_{z2}.$$

первое принималось произвольно, а, не исходя, из допущений модели.

Так, в [3] первичное поле  $B_{z1}$  определено чисто гармоническим

$$B_{z1} = B_m e^{-j\alpha x},$$

тогда как, для модели ЛИМ с бесконечно длинными магнитопроводами индуктора оно имеет более сложную структуру, включающую в себя, как бегущую, так и пульсирующую составляющую [4]

$$B_{z1} = B_m \left[ e^{-j\alpha x} - 1 \right].$$

Отметим, что исключение пульсирующей составляющей первичного поля в [3] делает невыполнимыми граничные условия магнитного поля (равенства нормальных составляющих  $H_z$  на линии раздела сред) – на стыках активной и краевых зон ЛИМ, т.е. нарушает требование внутренней непротиворечивости модели.

По этой причине, ниже приводится более корректное, для поставленной цели, решение для  $x,y$ -модели ЛИМ.

## II. ОПИСАНИЕ ДВУМЕРНОЙ $x,y$ -МОДЕЛИ ЛИМ

**Формулировка двумерной  $x,y$ -модели ЛИМ.** При построении двумерной модели ЛИМ, в заявленном выше назначении, – оценки точности косвенных способов учета поперечного краевого эффекта в одномерных моделях ЛИМ, будем руководствоваться следующими соображениями:

- возможностью получения аналитического, причем, в конечных интегралах, решения, что предполагает максимальную простоту исходной конструкции ЛИМ;

- необходимостью корректного сравнения результатов одномерной  $x$  и двумерной  $x, y$ -моделей ЛИМД, что предполагает их полное подобие по общей координате –  $x$ ;

- необходимостью одинакового описания поперечного краевого эффекта в одномерной  $y$ -модели и в  $x, y$ -двумерной ЛИМ, что требует использования одинаковых допущений на боковых границах ВЭ.

Согласно этим положениям, оценку совместного влияния продольных и поперечного краевых эффектов на характеристики ЛИМ проведем для наиболее простой конструкции ЛИМ, в которой, ширина ВЭ –  $a$  равна ширине магнитопровода индуктора –  $c$  (рис. 1а). В такой постановке исключаются второстепенные факторы – влияние вылета лобовых частей ВЭ на распределение вторичных токов и распределение первичных и вторичных магнитных полей в области лобовых частей. Кроме того, такой конструкции ЛИМ должно соответствовать и наименее громоздкое аналитическое решение.

В продольном  $x$ -направлении, примем наиболее простое представление ЛИМ – с бесконечно длинными магнитопроводами индуктора, структурно повторяющую одномерную  $x$ -модель, рассмотренную в [4] (рис. 1б). Для этой модели, первичный и вторичный токи равномерно распределены по высоте зазора с объемными плотностями  $J_1$  и  $J_2$ .

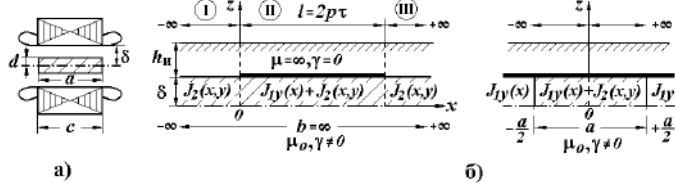


Рис.1. а) - конструкция ЛИМ с ВЭ ограниченной ширины б) – ее двумерная  $x, y$ - модель по оси  $x$ , в) – по оси  $y$

Плотность первичного тока  $J_1$  задана и представляет собой чисто бегущую волну, представленную одной продольной составляющей

$$J_{y1} = J_{1m} e^{-j\alpha x}.$$

Плотность вторичного тока  $J_2$  имеет две геометрические составляющие (по осям  $x$  и  $y$ )

$$\bar{J}_2(x, y) = \bar{J}_{x2}(x, y) + \bar{J}_{y2}(x, y).$$

В поперечном  $y$ -направлении расчетную модель ЛИМ определим подобно одномерной  $y$ -модели ЛИМ для анализа поперечного краевого эффекта [2]. Соответственно, размеры индуктора в этом направлении примем бесконечно широкими ( $-\infty < y < +\infty$ ), а ВЭ – конечными ( $-a/2 < x < +a/2$ ), как это показано на рис. 1в. Отметим, что наличие бесконечно широких продолжений магнитопровода индуктора модели ЛИМ обуславливает равенство нулю вторичной напряженности магнитного поля на краях ВЭ ( $y = \pm a/2$ ).

**Уравнения модели.** Напряженность магнитного поля двумерной модели ЛИМ описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных [4]

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \alpha \varepsilon_0 (1-s) \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\alpha^2 \varepsilon_0 H_z = j\alpha J_{1m} e^{-j\alpha x}. \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{\omega \mu \gamma}{\alpha^2}$  – добротность;  $\alpha = \frac{\pi}{\tau}$ ;  $\tau$  – полюсное деление;  $\omega = 2\pi f$ ;  $\mu$  – магнитная проницаемость ВЭ;  $\gamma$  – электропроводность ВЭ.

Как и для бесконечно длинной машины, задача о поперечном краевом эффекте решается значительно проще, если находить напряженность вторичного магнитного поля, считая распределение первичного поля заданным. Для принятой двумерной  $x, y$ -модели ЛИМ напряженность первичного магнитного поля имеет тот же вид, что и в одномерной  $x$ -модели [4]

$$H_{z1} = \frac{I}{j\alpha} J_{1m} (e^{-j\alpha x} - 1). \quad (2)$$

Определяя результирующую напряженность магнитного поля ЛИМ как сумму первичного и вторичного

$$H_z = H_{z1} + H_{z2}. \quad (3)$$

исходное уравнение (1) преобразуем относительно вторичной напряженности магнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_{z2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z2}}{\partial y^2} - \alpha \varepsilon_0 (1-s) \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} - j\alpha^2 \varepsilon_0 H_{z2} = \\ = \alpha \varepsilon_0 s J_{1m} e^{-j\alpha x} - \alpha \varepsilon_0 J_{1m} \end{aligned} \quad (4)$$

Полное описание трехзонной модели ЛИМ по рис. 1, представляет собой систему трех уравнений вида (3), различающихся правой частью (наличием или отсутствием в конкретной зоне первичной плотности тока)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_{z2}^I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z2}^I}{\partial y^2} - \alpha \varepsilon_0 (1-s) \frac{\partial H_{z2}^I}{\partial x} - j\alpha^2 \varepsilon_0 H_{z2}^I = 0 \\ \frac{\partial^2 H_{z2}^{II}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z2}^{II}}{\partial y^2} - \alpha \varepsilon_0 (1-s) \frac{\partial H_{z2}^{II}}{\partial x} - j\alpha^2 \varepsilon_0 H_{z2}^{II} = \\ = \alpha \varepsilon_0 s J_{1ym} e^{-j\alpha x} - \alpha \varepsilon_0 J_{1ym} \\ \frac{\partial^2 H_{z2}^{III}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z2}^{III}}{\partial y^2} - \alpha \varepsilon_0 (1-s) \frac{\partial H_{z2}^{III}}{\partial x} - j\alpha^2 \varepsilon_0 H_{z2}^{III} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

**Граничные условия** двумерной модели ЛИМ необходимо определять по двум координатам –  $x$  и  $y$ .

По координате  $x$  определяются подобно одномерной задаче, рассмотренной выше, и учитывают:

- затухание вторичного поля при удалении от индуктора

$$H_{z2}^I|_{x=-\infty} = 0, \quad H_{z2}^{III}|_{x=+\infty} = 0; \quad (6)$$

- равенство касательных составляющих результирующей напряженности магнитного поля, что в принятой модели ЛИМ с  $H_{z1}(0) = H_{z1}(l) = 0$  соответствует равенству вторичных напряженностей,

$$H_{z2}^{II}|_{x=0} = H_{z2}^I|_{x=0}, \quad H_{z2}^{II}|_{x=l} = H_{z2}^{III}|_{x=l}; \quad (7)$$

- равенство касательных составляющих плотностей вторичного тока на границах активной и краевых зон

$$J_{y2}^{II}|_{x=0} = J_{y2}^I|_{x=0}, \quad J_{y2}^{II}|_{x=l} = J_{y2}^{III}|_{x=l}.$$

Последнее условие преобразуем относительно искомой функции, используя соотношение [4] -  $J_{y2} = -\partial H_{z2} / \partial x$

$$\left. \frac{\partial H_{z2}^{II}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial H_{z2}^I}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial H_{z2}^{II}}{\partial x} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial H_{z2}^{III}}{\partial x} \right|_{x=l}. \quad (8)$$

По координате  $y$  (на боковых краях вторичного элемента) граничные условия записываются исходя из физического смысла задачи – равенства нулю вторичной напряженности магнитного поля за пределами ВЭ

$$H_{z2}^I, H_{z2}^{II}, H_{z2}^{III}|_{y=a/2} = 0, \quad H_{z2}^I, H_{z2}^{II}, H_{z2}^{III}|_{y=-a/2} = 0. \quad (9)$$

**Решение.** Для нахождения решения используем метод разделения переменных (метод Фурье), согласно которому искомая функция  $H_{z2}(x, y)$ , представляется в виде произведения двух функций  $U(x)$  и  $V(y)$ , зависящих только от одной координаты.

$$H_{z2}(x, y) = U(x)V(y). \quad (10)$$

Наибольшую трудность для решения этим методом представляет второе - неоднородное уравнение системы (4) для активной зоны. Наличие правой части в этом уравнении не позволяет непосредственно разделить переменные. Поэтому далее полагаем, что правую часть этого уравнения

$$F(x) = \alpha \varepsilon_0 s J_{Im} e^{-j\alpha x} - \alpha \varepsilon_0 J_{Im}, \quad (11)$$

возможно представить подобно искомой функции  $H_{z2}(x, y)$ , в виде произведения двух функций -  $V(y)$ , определенной выше, и пока неизвестной -  $f(x)$ . Такое представление правой части основывается на известном методе разложения правой части в ряд по собственным функциям

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) V_n(y). \quad (10)$$

Соответственно решение исходного дифференциального уравнения также будет представлено рядом

$$H_{z2} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) V_n(y). \quad (12)$$

При этом  $V_n(y)$  будет собственной функцией рассматриваемой задачи.

Подстановка  $H_{z2}(x, y)$  по (12) и  $F(x)$  по (11) в исходное уравнение (3) позволяет преобразовать последнее к следующему виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{U_n} \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{1}{V_n} \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} - p \frac{1}{U_n} \frac{\partial U_n}{\partial x} - q^2 - \frac{f_n(x) V_n}{U_n V_n} \right] = 0. \quad (13)$$

где  $p = \alpha \varepsilon_0 (I - s)$ ;  $q^2 = j\alpha^2 \varepsilon_0$ .

Поскольку  $U_n$  и  $V_n$  функции независимых переменных - координат  $x$  и  $y$ , то выполнение равенства (13) возможно при равенстве нулю каждого  $n$ -го выражения, находящегося под знаком суммы. Указанное обстоя-

тельство позволяет получить новое уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{1}{U_n} \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} - p \frac{1}{U_n} \frac{\partial U_n}{\partial x} - q^2 - \frac{f_n(x)}{U_n} = - \frac{1}{V_n} \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} = \vartheta_n^2. \quad (15)$$

Уравнения, описывающие поле в краевых зонах, преобразуются подобным образом, с той разницей, что для них в соотношении вида (14) будет отсутствовать четвертое слагаемое соответствующее правой части.

Поскольку уравнения системы (4) различаются только правой частью, которая является функцией только одной переменной -  $x$ , мы вправе предположить, что составляющая решения по координате  $y$  -  $V_n(y)$  будет одинакова для всех трех зон. В этом случае, нахождение решения исходной системы трех дифференциальных уравнений в частных производных (4) сводится к решению системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно координаты  $x$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_n^I}{\partial x^2} - \alpha \varepsilon_0 (I - s) \frac{\partial U_n^I}{\partial x} - (j\alpha^2 \varepsilon_0 + \vartheta_n^2) U_n^I = 0 \\ \frac{\partial^2 U_n^{II}}{\partial x^2} - \alpha \varepsilon_0 (I - s) \frac{\partial U_n^{II}}{\partial x} - (j\alpha^2 \varepsilon_0 + \vartheta_n^2) U_n^{II} = f_n(x) \\ \frac{\partial^2 U_n^{III}}{\partial x^2} - \alpha \varepsilon_0 (I - s) \frac{\partial U_n^{III}}{\partial x} - (j\alpha^2 \varepsilon_0 + \vartheta_n^2) U_n^{III} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

и одного уравнения относительно координаты  $y$

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \vartheta_n^2 V_n = 0. \quad (17)$$

Граничные условия для системы уравнений (15) получим, используя граничные условия (5 - 8) исходной задачи и выражения для искомой функции  $H_{z2}(x, y)$  (9)

$$U_n^I(x)|_{x=-\infty} = 0, \quad U_n^{III}(x)|_{x=+\infty} = 0; \quad (18)$$

$$U_n^{II}(x)|_{x=0} = U_n^I(x)|_{x=0}, \quad U_n^{II}(x)|_{x=l} = U_n^{III}(x)|_{x=l}; \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial U_n^{II}(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial U_n^I(x)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial U_n^{II}(x)}{\partial x} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial U_n^{III}(x)}{\partial x} \right|_{x=l}; \quad (20)$$

$$V_n(y)|_{y=a/2} = 0, \quad V_n(y)|_{y=-a/2} = 0. \quad (21)$$

Поскольку в качестве собственных функций задачи использовано разложение по оси  $y$ , величину константы разделения  $\vartheta_n$  дает уравнение относительно  $V_n(y)$  (16) с граничными условиями (20). Решение этого уравнения имеет следующий вид

$$V_n(y) = D_{1n} \sin \vartheta_n y + D_{2n} \cos \vartheta_n y.$$

В силу симметрии задачи относительно оси  $x$  ( $D_{1n} = 0$ ), поэтому

$$V_n(y) = D_n \cos \vartheta_n y, \quad (22)$$

где  $D_n$  - произвольная постоянная.

Определим величину константы разделения  $\vartheta_n$ , для чего воспользуемся граничными условиями (20). Как видно, выполнение этих граничных условий

$$D_n \cos(\pm \vartheta_n \frac{a}{2}) = 0.$$

возможно для множества значений  $\vartheta_n$ , подчиняющихся следующему равенству

$$\vartheta_n = (2n-1) \frac{\pi}{a} \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (23)$$

Определение константы разделения  $\vartheta_n$  дает возможность перейти к решению системы уравнений (15), составленных для функции  $U_n(x)$ . Для неоднородного уравнения системы (15) решение будем искать в виде суммы общего и частного

$$U(x) = U_{\text{общ}} + U_{\text{част}}. \quad (24)$$

Общее решение уравнений системы (15) представим в следующем виде

$$U_{\text{общ}} = D_{1an} e^{\sigma_{1n} x} + D_{2an} e^{\sigma_{2n} x}, \quad (25)$$

где  $D_{1an}$ ,  $D_{2an}$  - постоянные интегрирования,  $\sigma_{1n}$ ,  $\sigma_{2n}$  - корни характеристического уравнения. Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальным уравнениям системы (15)

$$\sigma_n^2 - \alpha \varepsilon_0 (1-s) \sigma_n - (j\alpha^2 \varepsilon_0 + \vartheta_n^2) = 0, \quad (26)$$

имеет корни:

$$\begin{aligned} \sigma_{1n} &= \alpha \left[ \frac{\varepsilon_0(1-s)}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2(1-s)^2}{4} + j\varepsilon_0 + \left(\frac{\vartheta_n}{\alpha}\right)^2} \right], \\ \sigma_{2n} &= \alpha \left[ \frac{\varepsilon_0(1-s)}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2(1-s)^2}{4} + j\varepsilon_0 + \left(\frac{\vartheta_n}{\alpha}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Частное решение определяется правой частью уравнения  $f_n(x)$ . С учетом (11, 21) неизвестная функция  $f_n(x)$  определяется следующим соотношением

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos \vartheta_n y, \quad (28)$$

которое, представляет собой разложение в ряд Фурье правой части исходного уравнения (1). Таким образом, неизвестные величины  $f_n(x)$  в (27) представляют собой коэффициенты разложения правой части  $F(x)$  в ряд Фурье

$$f_n(x) = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} F(x) \cos \vartheta_n y dy = -G_n [\alpha \varepsilon_0 s e^{-j\alpha x} - \alpha \varepsilon_0] J_{1m}, \quad (29)$$

$$\text{где } G_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n-1)}. \quad (30)$$

Определение правой части уравнения (15) позволяет теперь найти частное решение (27). Частное решение будем искать в виде функции, подобной свободному члену дифференциального уравнения (10):

$$U_{\text{част}} = U_{1n} e^{-j\alpha x} + U_{0n}. \quad (31)$$

Подстановка  $U_{\text{част}}$  по (30) в уравнения (15) дает после некоторых преобразований:

$$U_{1n} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cdot \frac{\alpha \varepsilon_0 s}{\alpha^2 (1+j\varepsilon_0 s) + \vartheta_n^2} J_{1m} = G_n C_{1n}, \quad (32)$$

$$U_{0n} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cdot \frac{\alpha \varepsilon_0}{j\alpha^2 \varepsilon_0 + \vartheta_n^2} J_{1m} = G_n C_{0n}, \quad (33)$$

где

$$C_{1n} = \frac{\alpha \varepsilon_0 s}{\alpha^2 (1+j\varepsilon_0 s) + \vartheta_n^2} J_{1m}, C_{0n} = -\frac{\alpha \varepsilon_0}{j\alpha^2 \varepsilon_0 + \vartheta_n^2} J_{1m}. \quad (34)$$

Таким образом, функция  $U_n(x)$  для активной зоны будет иметь следующий вид

$$U_n^{\text{II}} = G_n C_{1n} e^{-j\alpha x} + G_n C_{0n} + D_{1an} e^{\sigma_{1n} x} + D_{2an} e^{\sigma_{2n} x}. \quad (35)$$

Решения однородных уравнений системы (16) получим как частный случай неоднородного. С учетом затухания поля в краевых зонах эти решения представляют собой следующие функции

$$U_n^{\text{I}} = D_{1kn} e^{\sigma_{1n} x} \quad U_n^{\text{III}} = D_{2kn} e^{\sigma_{2n} x}, \quad (36)$$

где  $D_{1kn}$ ,  $D_{2kn}$  - постоянные интегрирования.

#### Определение постоянных интегрирования.

Постоянные интегрирования  $D_{1an}$ ,  $D_{2an}$ ,  $D_{1kn}$ ,  $D_{2kn}$  определим, используя граничные условия (14, 15, 18) и выражение для  $U_n(x)$  по (27, 28), что дает систему четырех алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования

$$\begin{cases} D_{1an} + D_{2an} - D_{1kn} = -G_n C_{1n} - G_n C_{0n} \\ D_{1an} e^{\sigma_{1n} l} + D_{2an} e^{\sigma_{2n} l} - D_{2kn} e^{\sigma_{2n} l} = -G_n C_{1n} e^{-j\alpha l} - G_n C_{0n} \\ \sigma_{1n} D_{1an} + \sigma_{2n} D_{2an} - \sigma_{1n} D_{1kn} = j\alpha G_n C_{1n} \\ \sigma_{1n} D_{1an} e^{\sigma_{1n} l} + \sigma_{2n} D_{2an} e^{\sigma_{2n} l} - \sigma_{2n} D_{2kn} e^{\sigma_{2n} l} = j\alpha G_n C_{1n} e^{-j\alpha l} \end{cases} \quad (37)$$

Решения этой системы удобно представить в следующем виде

$$\begin{cases} D_{1kn} = -G_n k_{1n} (1 - e^{-\sigma_{1n} l}) \\ D_{1an} = +G_n k_{1n} e^{-\sigma_{1n} l} \\ D_{2an} = -G_n k_{2n} \\ D_{2kn} = -G_n k_{2n} (1 - e^{-\sigma_{2n} l}) \end{cases}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{где } k_{1n} &= \left[ \frac{\sigma_{2n} + j\alpha}{\sigma_{1n} - \sigma_{2n}} C_{1n} + \frac{\sigma_{2n}}{\sigma_{1n} - \sigma_{2n}} C_{0n} \right], \\ k_{2n} &= \left[ \frac{\sigma_{1n} + j\alpha}{\sigma_{1n} - \sigma_{2n}} C_{1n} + \frac{\sigma_{1n}}{\sigma_{1n} - \sigma_{2n}} C_{0n} \right] - \text{коэффици-} \end{aligned} \quad (39)$$

циенты.

Соответственно функции  $U_n(x)$  будут представлены нижеследующими выражениями

$$\begin{cases} U_n^{\text{I}} = -G_n k_{1n} (1 - e^{-\sigma_{1n} l}) e^{\sigma_{1n} x} \\ U_n^{\text{II}} = G_n [C_{1n} e^{-j\alpha x} + C_{0n} + k_{1n} e^{\sigma_{1n} (x-l)} - k_{2n} e^{\sigma_{2n} x}] \\ U_n^{\text{III}} = -G_n k_{2n} (1 - e^{-\sigma_{2n} l}) e^{\sigma_{2n} x} \end{cases} \quad (40)$$

что позволяет определить искомые величины вторичной напряженности магнитного поля двумерной модели ЛИМ -

$$\begin{cases} H_{z2}^I = -\sum_{n=1}^{\infty} G_n k_{1n} (1 - e^{-\sigma_{1n} l}) e^{\sigma_{1n} x} \cos \vartheta_n y \\ H_{z2}^{II} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n [C_{1n} e^{-j\alpha x} + C_{0n} + k_{1n} e^{\sigma_{1n} (x-l)} - k_{2n} e^{\sigma_{2n} x}] \cos \vartheta_n y \\ H_{z2}^{III} = -\sum_{n=1}^{\infty} G_n k_{2n} (1 - e^{-\sigma_{2n} l}) e^{\sigma_{2n} x} \cos \vartheta_n y \end{cases} \quad (41)$$

**Составляющие плотности вторичного тока.** Для определения  $J_{2x}$  и  $J_{2y}$  воспользуемся уравнением Максвелла  $\text{rot} H = J$ , которое, при наличии только одной составляющей магнитного поля  $H_{z2}$ , распадается на два скалярных

$$J_{x2} = \frac{\partial H_{z2}}{\partial y}, \quad J_{y2} = -\frac{\partial H_{z2}}{\partial x}.$$

Дифференцирование выражения напряженности магнитного поля  $H_{z2}$  (41) по координатам  $x$  и  $y$  приводит к следующим выражениям составляющих плотности вторичных токов

$$\begin{cases} J_{x2}^I = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \vartheta_n k_{1n} (1 - e^{-\sigma_{1n} l}) e^{\sigma_{1n} x} \sin \vartheta_n y \\ J_{x2}^{II} = -\sum_{n=1}^{\infty} G_n \vartheta_n [C_{1n} e^{-j\alpha x} + C_{0n} + k_{1n} e^{\sigma_{1n} (x-l)} - k_{2n} e^{\sigma_{2n} x}] \times \sin \vartheta_n y \\ J_{x2}^{III} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \vartheta_n k_{2n} (1 - e^{-\sigma_{2n} l}) e^{\sigma_{2n} x} \sin \vartheta_n y \\ J_{y2}^I = \sum_{n=1}^{\infty} G_n k_{1n} (1 - e^{-\sigma_{1n} l}) \sigma_{1n} e^{\sigma_{1n} x} \cos \vartheta_n y \\ J_{y2}^{II} = -\sum_{n=1}^{\infty} G_n [-j\alpha C_{1n} e^{-j\alpha x} + k_{1n} \sigma_{1n} e^{\sigma_{1n} (x-l)} - k_{2n} \sigma_{2n} e^{\sigma_{2n} x}] \times \cos \vartheta_n y \\ J_{y2}^{III} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n k_{2n} (1 - e^{-\sigma_{2n} l}) \sigma_{2n} e^{\sigma_{2n} x} \cos \vartheta_n y \end{cases} \quad (42)$$

Распределения вторичных токов, полученные, как линии равного уровня вторичной напряженности магнитного поля (41) показаны на рис. 2.

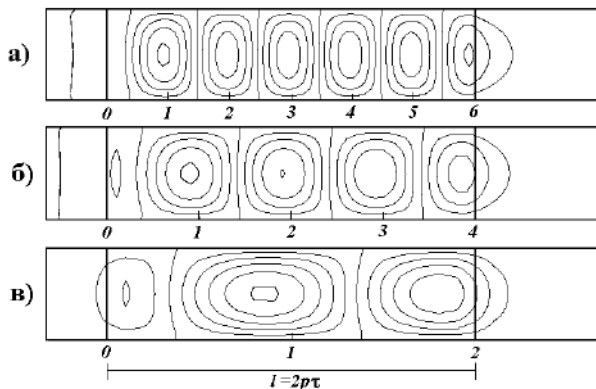


Рис. 2. Распределения вторичных токов в ВЭ ЛИМ ( $s=1$ ): а) -  $2p = 6$ ; б) -  $2p = 4$ ; в) -  $2p = 2$

**Тяговое усилие.** Наиболее простой путь его определения состоит в расчете силы противодействия, действующей со стороны ВЭ на индуктор

$$F_x = -Re \frac{\mu_0}{2} \delta \int_{-a/2}^{a/2} \int \dot{H}_{z2}(x, y) J_{1m} dx dy, \quad (44)$$

что приводит к следующему выражению  $F_x$  двумерной  $x, y$ - модели ЛИМД в абсолютных значениях

$$F_x = \frac{\mu_0 a l \delta}{4\alpha} J_{1m}^2 \sum_n \alpha G_n^2 \left[ C_{1n} + \frac{k_{1n}}{l} \cdot \frac{1 - e^{-\sigma_{1n} l}}{\sigma_{1n} + j\alpha} + \frac{k_{2n}}{l} \cdot \frac{1 - e^{\sigma_{2n} l}}{\sigma_{2n} + j\alpha} \right], \quad (45)$$

а в относительных (нормированном)

$$F_{x*} = \sum_n \alpha G_n^2 \left[ C_{1n} + \frac{k_{1n}}{l} \cdot \frac{1 - e^{-\sigma_{1n} l}}{\sigma_{1n} + j\alpha} + \frac{k_{2n}}{l} \cdot \frac{1 - e^{\sigma_{2n} l}}{\sigma_{2n} + j\alpha} \right] \quad (46)$$

с базовой величиной -  $F_{\text{БД}\infty} = \frac{\mu_0 a l \delta}{4\alpha} J_{1m}^2$ .

### III. ОЦЕНКА СПОСОБОВ УЧЕТА ПОПЕРЕЧНОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА В ОДНОМЕРНЫХ $x$ -МОДЕЛЯХ ЛИМ

Полученная выше двумерная  $x, y$ -модель ЛИМ позволяет дать качественную и количественную оценку косвенным способам косвенного учета поперечного краевого эффекта в одномерных  $x$ -моделях ЛИМ с массивным ВЭ.

Напомним, что косвенный учет этого эффекта возможен двумя способами:

- Внешним, введением поправочного коэффициента  $k_{TF}$  к усилию ЛИМ

$$k_{TF} = \frac{F_{xT}}{F_x}, \quad (47)$$

где: -  $F_x$  - усилие кругового аналога (КРАН) ЛИМ без учета поперечного краевого эффекта;

- $F_{xT}$  - усилие КРАН ЛИМ с учетом поперечного краевого эффекта.

- Внутренним, введением поправочного коэффициента  $k_{TG}$  к величине проводимости ВЭ (или, что, то же самое, к добротности)

$$k_{TG} = \frac{\gamma_{2T}}{\gamma_2} = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}, \quad (48)$$

где:  $\gamma_{2T}$  - эквивалентная проводимость ВЭ с учетом поперечного краевого эффекта;  $\varepsilon_T$  - эквивалентная добротность.

Для КРАН ЛИМ, с шириной ВЭ, равной ширине индуктора, коэффициенты поперечного краевого эффекта  $k_{TF}$  (47),  $k_{TG}$  (48) имеют следующий вид [1,2]

$$k_{TF} = Re \left[ 1 - (1 - j\varepsilon) \frac{th \lambda \frac{a}{2}}{\lambda \frac{a}{2}} \right], \quad (49)$$

где  $\lambda^2 = \alpha^2 (1 + j\varepsilon)$ ,

$$k_{TG} = \frac{\lambda \frac{a}{2} \cdot th \lambda \frac{a}{2} - 1}{\lambda \frac{a}{2} \cdot th \lambda \frac{a}{2} + j\varepsilon_0 s}, \quad (50)$$

и дают одинаковые результаты при расчете тягового усилия.

Понятно, что применение такого подхода - косвенного учета поперечного краевого эффекта с использованием коэффициентов  $k_{TF}$ ,  $k_{TG}$  для одномерной  $x$ -модели ЛИМ,

в чистом виде, некорректно, поскольку в ней нарушается основное допущение, принятое при их получении (все электрические и магнитные величины КРАН ЛИМ представляют собой только гармонические пространственные распределения).

Однако, в практическом плане такой способ учета конечной ширины ВЭ  $x$ -модели ЛИМ представляется весьма удобным, и, в своей основе, правомерным, имея в виду, как, простоту выражений поправочных коэффициентов  $k_{TF}$ ,  $k_{TG}$  (49, 50), так, и общность электромагнитных явлений в КРАН ЛИМ и ЛИМ. При этом, следует ожидать, что различные способы учета поперечного краевого эффекта (внешний и внутренний) должны давать уже различные результаты.

Отмеченные выше умозрительные соображения, очевидно, требуют более весомой - количественной оценки. Такая оценка проводилась сопоставлением нормированных механических характеристик  $F_{X*}(s)$ , рассчитанных по двумерной  $x,y$ -модели (46) и по одномерным  $x$ -моделям с косвенным учетом поперечного краевого эффекта по (47, 48) при предельном несоответствии этих моделей (наибольшем проявлении продольных краевых эффектов - для индукторов с  $2p = 2$ ).

**Внешний способ.** Представление о возможностях внешнего способа дает рис. 3, где приведены расчеты  $F_{X*}(s)$  для ЛИМД с малой -  $\epsilon_0 = 1$  (рис. 3,а) и высокой добротностью  $\epsilon_0 = 10$  (рис. 3,б).

Видно, что при малых величинах добротности ( $\epsilon_0 = 1$ ) графики механических характеристик обеих моделей близки друг к другу, а наибольшая погрешность этого способа наблюдается в области больших скольжений. При больших значениях добротности ( $\epsilon_0 = 10$ ), свойства механических характеристик решительно меняются - в области больших скольжений ( $s = 0.5-1.0$ ) обе модели ЛИМ дают близкие значения, а в области малых - ( $s = 0-0.5$ ) одномерная  $x$ -модель с внешним учетом поперечного краевого эффекта становится недостоверной.

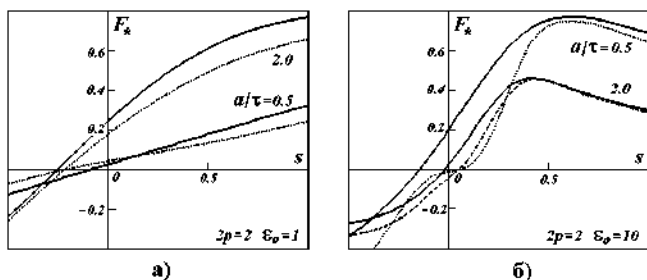


Рис. 3. Нормированные механические характеристики ЛИМ с ВЭ конечной ширины:  
— двумерная  $x, y$ -модель; --- одномерная  $x$ -модель с внешним учетом поперечного краевого эффекта (49)

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Вевюрко И.А. К расчету характеристики двухфазной индукционной машины с полым ротором / И.А. Вевюрко // Вестник электропромышленности. - 1957. - № 6. - С. 34-39.
- [2] Вольдек А.И. Токи и усилия в слое жидкого металла плоских линейных индукционных насосов / А.И. Вольдек // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. - 1959. - № 1. - С. 3-10.

**Внутренний способ.** Особенности внутреннего способа учета поперечного краевого эффекта представлены на рис. 4. Здесь обращает на себя внимание значительное расхождение характеристик для узких ЛИМ с малой добротностью (рис. 4,а). При больших значениях добротности внутренний способ дает значительно лучшие результаты (рис. 4,б).

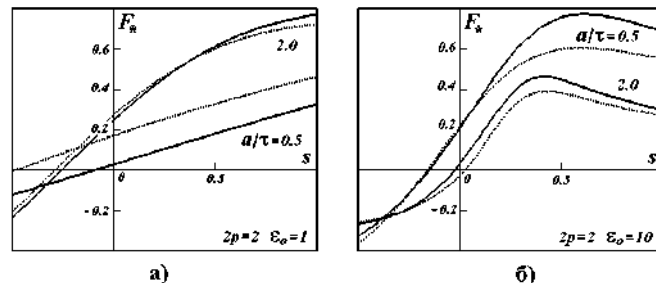


Рис. 4. Нормированные механические характеристики ЛИМ с ВЭ конечной ширины:

— двумерная  $x, y$ -модель; --- одномерная  $x$ -модель с внутренним учетом поперечного краевого эффекта (50)

Определенный недостаток внутреннего учета поперечного краевого эффекта состоит в том, что коэффициент  $k_{TG}$  представляет собой комплексную величину, т.е. сопротивление ВЭ приобретает активно-индуктивный характер. Это обстоятельство затрудняет применение такого подхода при использовании современных пакетов метода конечных элементов для двумерных  $x, z$ -задач, например, *ELCUT*, *FEMLAB*. По этой причине была рассмотрена возможность использования предельного случая коэффициента  $k_{TG}$  (50) при  $\epsilon = 0$ , имеющее, действительное значение (не комплексное)

$$k_{TG0} = \left[ 1 - \frac{th\alpha \frac{a}{2}}{\alpha \frac{a}{2}} \right]. \quad (51)$$

Соответствующие характеристики приведены на рис. 5. Видно, что такое упрощение вполне допустимо.

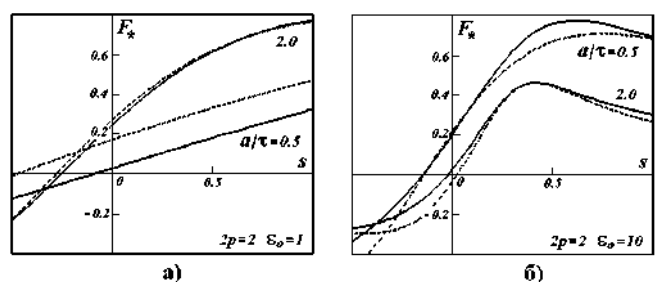


Рис. 5. Нормированные механические характеристики ЛИМ с ВЭ конечной ширины:

— двумерная  $x, y$ -модель; --- одномерная  $x$ -модель с внутренним учетом поперечного краевого эффекта (51)

- [3] Ращепкин А.П. Концевые явления в линейных индукционных машинах/ А.П. Ращепкин // В кн.: Матер. V Рижск. совещ. по магнитной гидродинамике. Теория индукционных МГД-машин II. - 1966. - С. 34-45.

- [4] Вольдек А.И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом/ А.И. Вольдек - Л.: Энергия, 1970. - 272 с.